

体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析*

(第2報、半だ円形円周切欠きを有する丸棒の曲げ)

村上敬宜**, 野田尚昭***, 西谷弘信***
Yukitaka MURAKAMI, Nao-aki NODA, Hironobu NISITANI**Key Words:** Elasticity, Stress Concentration Factor, Body Force Method, Bending, Round Bar, Circumferential Groove, Notch Effect.

1. 緒 言

切欠きを有する丸棒の応力集中は、実際問題ではおもに軸の設計において問題となるが、金属の疲労強度の研究に古くから用いられている回転曲げ疲労試験においても重要である。厳密解がないため、長い間ノイバーの三角則⁽¹⁾による近似値か、それをもとに作成された Peterson⁽²⁾ や西田⁽³⁾の応力集中線図が用いられてきた。これらの応力集中係数表の使用頻度はかなり多いが、その値の精度について議論がなされることはあまりなかった。しかし最近ひずみゲージによる実験⁽⁴⁾や有限要素法による計算⁽⁵⁾⁽⁶⁾から、ノイバーの三角則による値には無視できない程度の誤差があるのでないかという指摘がなされた（引張り問題では最大誤差は 10% 程度に達することが明らかにされた⁽⁷⁾）。切欠き効果（または寸法効果）の定量的評価や、最近の実験技術の進歩とともに、疲労機構の詳細な究明のためには、正確な応力集中と応力分布を知ることが必要である。また、著者らが調査した切欠き効果に関する過去の研究の中には、切欠き材の疲労限度 (σ_{w1}) が平滑材の疲労限度 (σ_{w0}) を応力集中係数 K_t でわった値より小さい ($\sigma_{w1} < \sigma_{w0}/K_t$) データも少なからず見られるが、このようなことは特別の事情がないかぎり起こりえないので、正確な K_t によって評価し、その実験結果が信頼できるものかどうか再検討する必要がある。多くの材料では $\sigma_{w1} > \sigma_{w0}/K_t$ となるが、高硬さ材では $\sigma_{w1} \approx \sigma_{w0}/K_t$ となる傾向があるので、特に高硬さ材の実験結果のうち $\sigma_{w1} < \sigma_{w0}/K_t$ となっているものが対象となるであろう。本論文では、このような観点から、得られた応力集中係数をノイバーの三角則による値と比較するほか、切欠き底近傍の応力分布に

及ぼす切欠き形状の影響を明らかにする。切欠き効果（または寸法効果）には切欠き底の最大応力のみでなく、応力分布も重要な意味をもっており、両者をあわせて考慮する立場は、き裂問題において応力拡大係数に注目することに通じる⁽⁸⁾。

第1報⁽⁹⁾では、これまで主として平面問題や軸対称問題の解析に用いられてきた体積力法⁽¹⁰⁾を、軸対称体の曲げ問題に適用するための基礎理論と二、三の応用例について報告した。その結果、無限体中の 1 円周上（中心角 φ ）に大きさが $\cos\varphi$ または $\sin\varphi$ で変化する 3 方向（円柱座標系の r, θ, z 方向）の分布力による任意の点の応力の式を基本解にすれば、軸対称体の曲げ問題が引張り問題やねじり問題と同様な手順で解析できることを明らかにした。本報では第1報で述べた基礎理論を、半だ円形円周切欠きを有する丸棒（図1）の曲げ応力集中の計算に応用する。円周切欠きを有する丸棒が曲げを受ける場合については、引張りやねじりを受ける場合よりもさらに解析的取扱いが

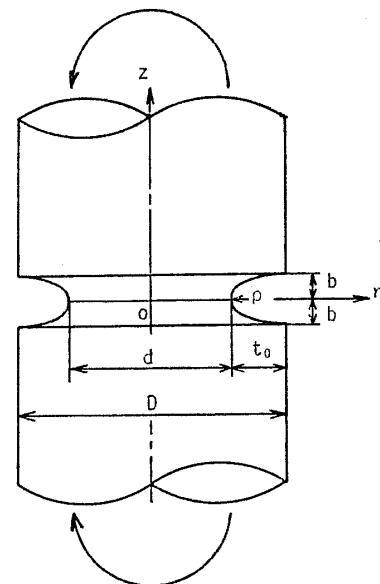
(半だ円形の長半径 $a = t_0$, 短半径 b , 切欠き半径 $\rho = b^2/a$)

図1 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の曲げ

* 昭和 56 年 4 月 1 日 第 58 期通常総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和 55 年 10 月 6 日。

** 正員、九州工業大学（〒804 北九州市戸畠区仙水町 1）。

*** 学生員、九州工業大学大学院。

**** 正員、九州大学工学部（〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1）。

困難になるため、そのような研究は見当たらないようである。解析的な方法以外では、菊川らが実験⁽⁴⁾と有限要素法⁽⁵⁾によって半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数を求めている。最近発達した有限要素法によれば原理的にはすべての場合の近似値を得ることができるが、各種の形状パラメータを変えて系統的な計算を行うことには不向きである。本論文では体積力法⁽¹⁰⁾によってこの問題の解析を行い、切欠き形状を表す寸法の組合せに対して系統的に応力集中の値を計算し、

設計および研究用として高精度の応力集中係数表と線図を作成した。また、材料の疲労強度の切欠き効果（または寸法効果）を考える上で重要な、切欠き底近傍の応力分布の解析も行い、切欠き形状の影響について考察を行った。本研究で計算した結果は半だ円形切欠きにとどまらず、等価だ円の概念から切欠き半径 ρ と深さ t_0 をそろえれば、U形・V形など一般の切欠きの応力集中の評価にも近似的に応用することができる。U形・V形などの切欠き形状、切欠きの開き角の影響については次報で報告する予定である。

2. 計算方法

体積力法を軸対称体の曲げ問題に適用するための基礎理論と、比較的簡単な問題への応用は第1報⁽⁹⁾で述べている。本論文で扱う問題においても、図2～4に示すような無限体中の1円周上に作用する3形式の分布力による応力の式を基本解とすれば、原理的には第1報の例題と同様な手順で解が得られる。すなわち、無限体中に想定した丸棒円筒面および円周切欠きとなるべき境界面に3種類の基本解を連続的に作用させ、その強さ（すなわち体積力の密度）を調節することによって図1のような境界条件を有する丸棒を得ることができる。この場合、基本解による応力場の性質から、軸を含む一つの縦断面にのみ注目して二次元問題と同様に取扱うことが可能であることを、第1報⁽⁹⁾の基礎理論で示した。しかしながら、実際には円筒面と切欠き部の二つの境界面において応力自由の条件を満足させねばならないので、精度の良い解を得るために、体積力の分布のしかたや境界の分割方法に、試行錯誤に基づく工夫が必要になる。

2.1 境界条件 図1のような丸棒の満足すべき境界条件は次のようになる。

$$(a) \quad r=D/2, \quad b \leq |z| \leq \infty : \quad \sigma_r=\tau_{rz}=\tau_{r\theta}=0$$

$$(b) \quad \text{半だ円形切欠き部表面} \quad (n: \text{法線方向}, t: \text{接線方向}, \theta: \text{円周方向}) : \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_n=\tau_{nt}=\tau_{n\theta}=0 \\ \dots\dots(1) \end{array} \right.$$

$$(c) \quad 0 \leq r \leq D/2, \quad |z|=\infty : \quad \sigma_z=\sigma_0 \frac{2r}{d} \cos \theta \quad (\text{他の応力は零})$$

ここで、 σ_0 は曲げモーメントの大きさを表す定数で、曲げモーメントは軸に垂直な断面の $\theta=\pi/2$ の直線のまわりに作用するとした。また σ_n 、 τ_{nt} 、 $\tau_{n\theta}$ は半だ円形切欠き部における法線方向の垂直応力、子午線方向のせん断応力、円周応力のせん断応力であって式(2)で表される。

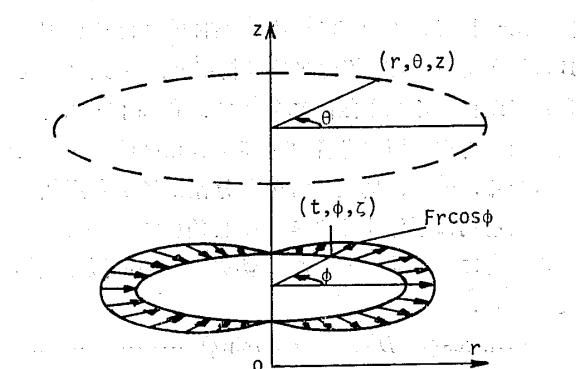


図2 無限体中の半径 t の円周上に分布する半径方向の力 $F_r \cos \phi$

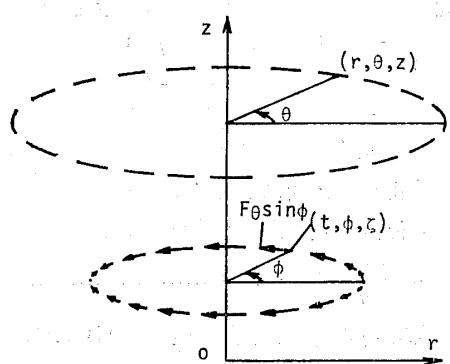


図3 無限体中の半径 t の円周上に分布する周方向の力 $F_\theta \sin \phi$

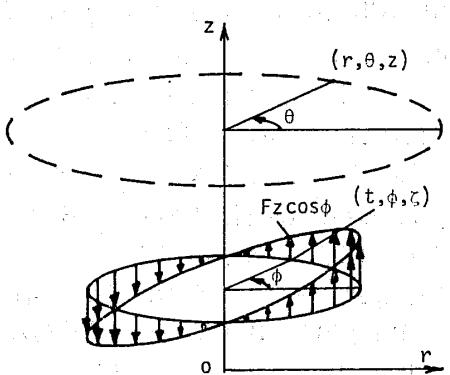


図4 無限体中の半径 t の円周上に分布する軸方向の力 $F_z \cos \phi$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2 \phi_1 + \sigma_z \sin^2 \phi_1 + 2\tau_{rz} \sin \phi_1 \cos \phi_1 \\ \tau_{nt} &= (-\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi_1 \cos \phi_1 \\ &\quad + \tau_{rz} (\cos^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_1) \\ \tau_{n\theta} &= \tau_{r\theta} |\cos \phi_1| + \tau_{\theta z} \sin \phi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 ϕ_1 は切欠き形状を表すだ円形の外向き法線と r 軸とのなす角度である。

2.2 体積力の密度の定義 切欠き部および丸棒円筒面となる境界上に分布する体積力の密度 $\rho_r, \rho_\theta, \rho_z$ を式(3), (4)で定義する。半径 t , 面積 $td\rho ds$ ($ds = \sqrt{(dt)^2 + (d\zeta)^2}$) の帶状の微小要素に働く体積力の合力の成分を dF_r, dF_θ, dF_z とすると [(t, φ, ζ) は力を作用させる点の円柱座標である]

切欠き部 :

$$\left. \begin{aligned} \rho_r \cos \varphi &= \frac{dF_r}{td\zeta d\varphi}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dF_\theta}{tds d\varphi} \\ \rho_z \cos \varphi &= \frac{2t}{d} \frac{dF_z}{tdtd\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

円筒面 :

$$\left. \begin{aligned} \rho_r \cos \varphi &= \frac{dF_r}{td\zeta d\varphi}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dF_\theta}{td\zeta d\varphi} \\ \rho_z \cos \varphi &= \frac{dF_z}{td\zeta d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

切欠き部の ρ_z については特に、打ち消すべき曲げ応力 $\sigma_z = \sigma_0 (2r/d) \cos \theta$ に対応して式(3)のような定義にすると精度向上のため都合がよい。

2.3 区間の分割と体積力の分布方法 図5に無限

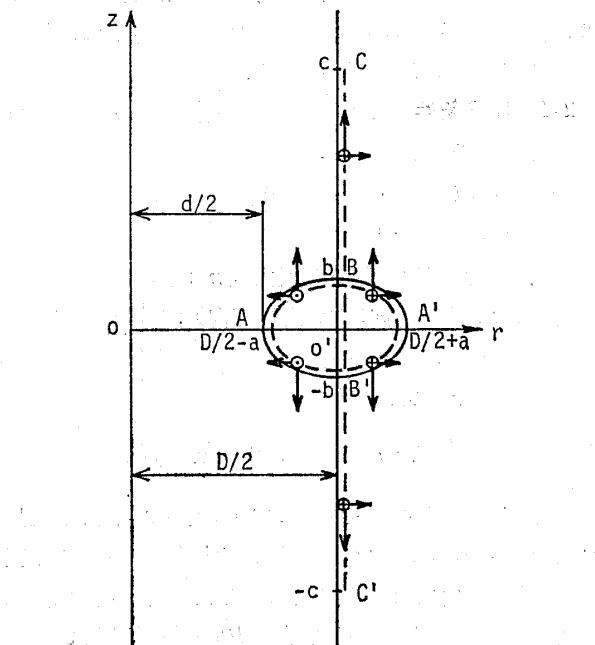


図5 無限体中に想定したドーナツ状境界面 ABA'B' と円筒面 CBO'B'C'

体中に想定した丸棒円筒面と切欠き形状を表すだ円形断面をもつドーナツ状境界面を示す。これら境界面の \odot 境界(図5に破線で示す無限小近傍の境界)に体積力を分布させる。分布すべき体積力の密度は閉じた形では求まらないので、切欠き部を n_1 分割、円筒側面を n_2 分割して各区間の注目点で境界条件を満たすよう数値計算を行う。外周の z 方向の寸法は計算結果に事実上影響しなくなる点C(最低の場合で直径 D の2倍程度)までの長さをとった。また、その分割は切欠き部に近いところでは細かい分割にし、切欠きから離れるにつれて分割を粗くした。具体的には境界BCをBの側から長さが等比級数(初項 b , 公比2または3)で変化する基本区間に分けて、各基本区間を等分割した。外周の境界条件は分割された区間の中点で満足させる。一方、切欠き部分の分割は切欠き形状を表すだ円を円に写像するときの中心角 ψ について等分割することによって行う。 ψ は切欠き上の位置を式(5)で定める。

$$r = a \cos \psi + D/2, \quad z = b \sin \psi \dots \dots \dots (5)$$

図5に示す区間ABを n_1 分割してAの側から番号を1から n_1 までつける。対応するAB', A'B, A'B'区間もAおよびA'の側から番号をつける。j番めの区間の範囲($\psi_{j1} \sim \psi_{j2}$)は式(6)で定まる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{j1} &= \pm \frac{\pi(j-1)}{2n_1}, \quad \pi \pm \frac{\pi(j-1)}{2n_1} \\ \psi_{j2} &= \pm \frac{\pi j}{2n_1}, \quad \pi \pm \frac{\pi j}{2n_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

また、i番めの区間における注目点(境界条件を満たす点)の位置を式(7)で決定する。

$$\psi_i = \pi - \frac{\pi}{2n_1}(i-0.5) \dots \dots \dots (7)$$

切欠き部の境界条件は図5に示すAB, AB', A'B, A'B'の対応するj番めの区間に同じ密度の体積力を分布させ、AB部分のi番めの注目点においてその条件を満たすよう体積力の密度を決定する。切欠き部以外のA'B, A'B'にも同じ密度の体積力を分布させるのは、丸棒円筒面となるべき境界上に生じるせん断応力をあらかじめ小さくしておくためである。分布する体積力の正の方向を図5に矢印で示す。このような方向に体積力を分布するのは第1報でドーナツ状空どうが曲げを受ける場合を解析した結果を参考にして、その場合と同じような応力状態をつくることによって良好な結果を得るためにある。なお、切欠きが深くなるとAB, AB' と BA', B'A'の部分の曲面積の差が大きくなりBA', B'A'部に分布した体積力がかえって悪影響を及ぼすことが解析の過程で明らかになった。そのような場合は対策としてBA'B'部が半径 b の半

円となるよう計算プログラムを変更した。円筒側面では BC および B'C' の対応する区間に B, B' の側から順に番号 ($j=n_1+1 \sim n_1+n_2$) をつけ、BC 間の i 番めの注目点（区間の中点）で境界条件を満たすよう各区間の体積力の密度を決めればよい。また B 点近傍では境界の不連続のために分布する体積力の密度が無限に大きくなる傾向があるが、このようなことは連立方程式を解いて各区間の体積力の密度を精度良く決める上で都合が悪い。そこで $j=n_1+1$ 番めの区間に分布する体積力の影響を求める際には BO' 部分 (B'O' 部分も同様) にも図 6 に示すような直線的に変化する体積力を分布させた。すなわち $j=n_1+1$ 区間には O'B の範囲を加えた。図 6 では半径方向の体積力の分布のみ示しているが、周方向、軸方向の体積力も同様に変化する体積力を分布させる^{*1}。このようにすれば $j=n_1+1$ 番めの区間に分布すべき体積力の値は有限な値となる。

2.4 影響係数の計算 j 番めの区間に単位密度の体積力を分布させたときの i 番めの区間の注目点にお

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rij}^{\rho r} &= \int_{\phi j_1}^{\phi j_2} \sigma_r F_r^* \frac{b}{a} t' d\phi, & \sigma_{rij}^{\rho \theta} &= \int_{\phi j_1}^{\phi j_2} \sigma_r F_\theta^* \sqrt{\left(\frac{b}{a} t'\right)^2 + \left(\frac{a}{b} \zeta\right)^2} d\phi \\ \sigma_{rij}^{\rho z} &= \int_{\phi j_1}^{\phi j_2} \sigma_r F_z^* \frac{2t}{d} \frac{a}{b} \zeta d\phi & (j=1 \sim n_1), & \sigma_{rij}^{\rho r} = \int_{z j_1}^{z j_2} \sigma_r F_r^* d\zeta \\ \sigma_{rij}^{\rho \theta} &= \int_{z j_1}^{z j_2} \sigma_r F_\theta^* d\zeta, & \sigma_{rij}^{\rho z} &= \int_{z j_1}^{z j_2} \sigma_r F_z^* d\zeta & (j=n_1+1 \sim n_1+n_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $(\phi j_1 \sim \phi j_2)$ および $(z j_1 \sim z j_2)$ は、それぞれ切欠き部および円筒側面の j 番めの区間の範囲を示す。式 (8) の積分は閉じた形で求めることができないので、シンプソンの公式によって数値積分する。 i 番めの注目点における影響は、その位置を示す座標を式 (8) に代入すればよい。切欠き部 ($i=1 \sim n_1$) の境界条件の表現には式 (8) で決定した応力を式 (2) によって変換し、 $\sigma_{nij}^{\rho r}, \tau_{ntij}^{\rho r}, \tau_{n\theta ij}^{\rho r}, \dots, \tau_{n\theta ij}^{\rho z}$ を求めておく必要がある。

2.5 各区間に分布する体積力の密度の決定 j 番めの区間に分布する体積力の密度 $\rho_{ri}, \rho_{\theta i}, \rho_{zi}$ は次の 3(n_1+n_2) 元連立方程式を解くことによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{ri} \sigma_{nij}^{\rho r} + \rho_{\theta i} \sigma_{nij}^{\rho \theta} + \rho_{zi} \sigma_{nij}^{\rho z}) + \sigma_0 \frac{2r_i}{d} \sin^2 \psi_i &= 0 & (i=1 \sim n_1) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{ri} \tau_{ntij}^{\rho r} + \rho_{\theta i} \tau_{ntij}^{\rho \theta} + \rho_{zi} \tau_{ntij}^{\rho z}) + \sigma_0 \frac{2r_i}{d} \sin \psi_i \cos \psi_i &= 0 & (i=1 \sim n_1) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{ri} \tau_{n\theta ij}^{\rho r} + \rho_{\theta i} \tau_{n\theta ij}^{\rho \theta} + \rho_{zi} \tau_{n\theta ij}^{\rho z}) &= 0 & (i=1 \sim n_1) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{ri} \sigma_{rij}^{\rho r} + \rho_{\theta i} \sigma_{rij}^{\rho \theta} + \rho_{zi} \sigma_{rij}^{\rho z}) &= 0 & (i=n_1+1 \sim n_1+n_2) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{ri} \tau_{rzij}^{\rho r} + \rho_{\theta i} \tau_{rzij}^{\rho \theta} + \rho_{zi} \tau_{rzij}^{\rho z}) &= 0 & (i=n_1+1 \sim n_1+n_2) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{ri} \tau_{r\theta ij}^{\rho r} + \rho_{\theta i} \tau_{r\theta ij}^{\rho \theta} + \rho_{zi} \tau_{r\theta ij}^{\rho z}) &= 0 & (i=n_1+1 \sim n_1+n_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 r_i は i 番めの注目点の r 座標である。式 (9) の連立方程式を解いて各区間に分布する体積力の密度が決定されれば、任意の点における応力は決定された体積力の密度と影響係数 [式 (8) において i 番めの注目

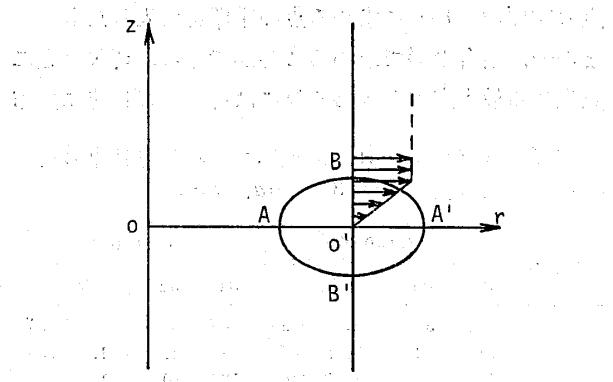


図 6 O'B 部分の体積力の分布方法

ける応力 $\sigma_{rij}^{\rho r} \sim \tau_{\theta z ij}^{\rho r}, \sigma_{rij}^{\rho \theta} \sim \tau_{\theta z ij}^{\rho \theta}, \sigma_{rij}^{\rho z} \sim \tau_{\theta z ij}^{\rho z}$ (影響係数) は、図 2～4 に示すような基本解の応力の式 $\sigma_r F_r^* \sim \tau_{\theta z} F_z^*$ [第 1 報⁽⁹⁾の式 (5)～(8) で与えられる] を積分することによって求まる。 $\sigma_{rij}^{\rho r}, \sigma_{rij}^{\rho \theta}, \sigma_{rij}^{\rho z}$ を例にとると、切欠き部では $dt = (b/a)t'd\phi$ ($t'=t-D/2$), $dt = (a/b)\zeta d\phi$ であるから式 (8) のようになる。

*1 このような分布の形は試行錯誤によって決めたものである。

点の座標のかわりに求める点の座標を代入したもの]との一次結合の形で求めることができる。切欠き底に発生する最大応力を求める際には切欠き底近傍に分布

表 1 分割数 n_1, n_2 の変化による計算結果の変化の例 ($\nu=0.3, t_0=a, \rho=b^2/a$)

$2t_0/D$	$2\rho/D=0.03$			$2\rho/D=0.2$		
	n_1	n_2	K_t	n_1	n_2	K_t
0.3	6	36	3.787 973	6	30	1.787 203
	8	42	3.787 165	8	40	1.786 952
	12	72	3.786 446	12	60	1.786 737
	∞_{6-8}		3.785	∞_{6-8}		1.786
	∞_{8-12}		3.785	∞_{8-12}		1.786
0.7	8	40	2.659 077	8	32	1.380 065
	12	60	2.662 158	12	48	1.382 803
	16	80	2.663 327	16	64	1.384 048
	∞_{8-12}		2.668	∞_{8-12}		1.388
	∞_{12-16}		2.667	∞_{12-16}		1.388

表 2 半円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 ($\nu=0.3$)

$2\rho/D$	著者ら	菊川ら ⁽⁴⁾	佐藤ら ⁽⁵⁾	ノイバーグ
0.02	2.877	—	—	2.82
0.03	2.790	—	—	2.73
0.05	2.630	—	—	2.56
0.1	2.306	—	—	2.21
1/9	2.245	2.26	2.27	2.15
4/29	2.112	2.13	—	2.01
0.2	1.858	1.86	1.87	1.77
0.3	1.575	—	—	1.53
1/3	1.504	1.50	1.53	1.47
0.4	1.390	—	—	1.37
0.5	1.269	1.27	1.29	1.26
0.6	1.183	—	—	1.18
2/3	1.139	1.14	—	1.14
0.8	1.072	—	—	1.07
0.9	1.032	—	—	1.03

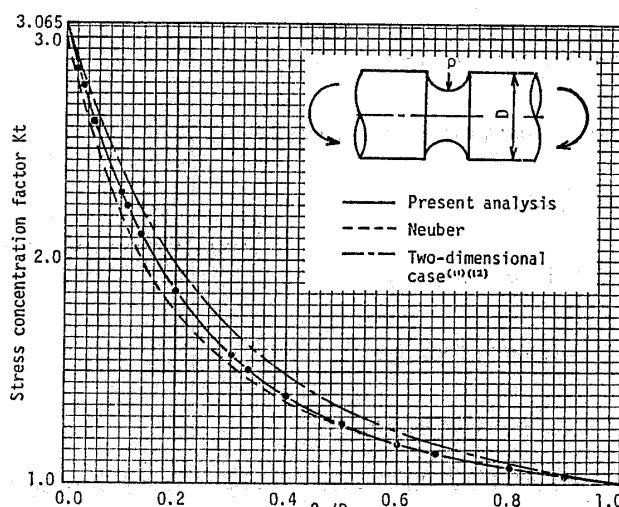


図 7 半円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 ($\nu=0.3$)

した体積力の効果は極限操作⁽¹⁰⁾によって求めておく必要がある。その補正には第1報で報告した式⁽⁹⁾を使用した。

2・6 基礎式 式(9)に含まれる $\sigma_{nij}^{\theta r}, \sigma_{nij}^{\theta \theta}, \dots$ などを具体的に計算するための式は、第1報⁽⁹⁾の式(5)～(8)で与えられる。紙数の都合上、本報では省略する。

3. 計算結果と考察

2章に示した手順によって応力集中を求める計算プログラムを作成した。計算にあたって式(8)に含まれる積分はシンプソンの公式によって数値積分したが、その分割数は一区間で10である。注目点と着力点の番号が一致するとき($i=j$ のとき)と応力集中部近傍に分布した体積力の最大応力におよぼす効果を求める際には特別に分割数を10倍に増した。応力集中係数 K_t は最小断面(図5のOA間)に生じる応力分布を積分して曲げモーメント M を求め、それに基づく公称応力を基礎にして決めた。最小断面OA間の $\theta=0$ の位置における z 方向の垂直応力を $\sigma_z(r)$ とすると、 K_t は式(10), (11)で与えられる。

$$M = 4 \int_0^{d/2} \int_0^{\pi/2} \sigma_z(r) r^2 \cos^2 \theta d\theta dr \\ = \pi \int_0^{d/2} \sigma_z(r) r^2 dr \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \quad \sigma_n = \frac{32M}{\pi d^3} \quad \dots \dots \dots (11)$$

式(10)における r に関する積分はシンプソンの公式によって計算する。このためOA間を分割し(分割数=14~32)各分割点での $\sigma_z(r)$ を求めた。分割は応力集中を考慮して切欠き底の近くでは細かくし

た。以下の計算ではこのようにして得られた応力集中係数を切欠き深さ t_0 と切欠き半径 ρ との関連でまとめているが、これらの寸法は半だ円形の長、短半径 a, b とは $t_0 = a$, $\rho = b^2/a$ の関係にある。

3・1 分割数 n_1 , n_2 の変化による計算結果の変化について 切欠き部の分割数 n_1 および円筒面の分割数 n_2 を変えるとき、ポアソン比 $\nu = 0.3$ で計算した例を表 1 に示す。表 1において ∞_{6-8} などは $n_1=6$ と $n_1=8$ の結果から外そうして得た値であることを意味する。計算機の容量の制約から分割数 n_1 と n_2 の大きさは制限されるが、以下に示すすべての計算結果について表 1 と同様な精度の検討を行った結果、誤差は最大でも 1% 以内であると考える。多くの場合四けための値が ±1 程度（誤差 0.1% 以内）変わらかどうかであ

る。

3.2 半円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中

表2に半円形円周切欠きを有する丸棒についての計算結果を、菊川らの実験値⁽⁴⁾、佐藤らの有限要素法による値⁽⁵⁾、ノイバーの三角則による値⁽¹⁾と比較して示す。ノイバーの三角則による値には切欠きの浅い範囲で5%程度の誤差がある。菊川らの値はひずみゲージを用いた実験によって得られたものであるが、著者らの値とはよく一致しており精度が良い。図7は表2の計算結果をノイバーの三角則による値、Ling⁽¹¹⁾と石田⁽¹²⁾によって得られた半円切欠きを有する帯板(二次元)の解と比較して整理したものである。著者らの値は $2\rho/D \rightarrow 0$ に従って半無限板縁に半円切欠きがある場合の厳密解 $K_t = 3.065^{(13)}$ に、また $2\rho/D \rightarrow 1$ に

従って $K_t = 1$ にそれぞれ無理なく一致することがわかる。

3.3 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数

表3は半だ円形円周切欠きを有する丸棒についての計算結果をノイバーの三角則による値とともにまとめたものである。これらの値のほとんどは $n_1 = 8 \sim 16$, $n_2 = 40 \sim 80$ の場合の結果から外そうして得たものである。表に示すような系統的な計算を行った結果ノイバーの三角則による値には切欠き形状の広い範囲にわたって最大6%程度の危険側の誤差が存在することが明らかになった。図8は縦軸に応力集中係数をとり、横軸に $2t_0/D$ をとって表3の結果を整理したものである。図8によればノイバーの三角則に含まれる無視できない程度の誤差の範囲がかなり広いものであることがわかる。

図9および図10は表3の結果を縦軸に応力集中係数 K_t 、横軸に $2\rho/D$ をとって整理したもので図8と併せて利用すれば、表3に実際に示していない寸法の組合せの形状に対する応力集中係数を求めることができる。

3.4 切欠き底近傍の応力分布 図11～13は最小断面における切欠き底近傍の応力分布を調べたものである。縦軸には軸方向の応力 σ_z を切欠き底の最大応力 σ_{max} で無次元化した値をとり、横

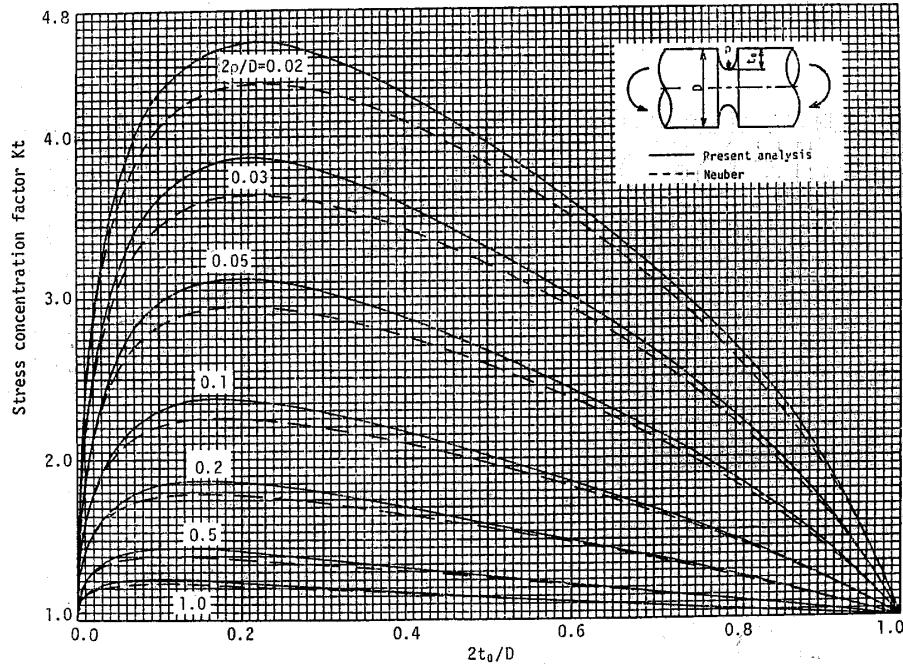


図8 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t ($\nu=0.3$, $t_0=a$, $\rho=b^2/a$)

表3 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t ($\nu=0.3$, $t_0=a$, $\rho=b^2/a$)

	$2\rho/D=0.02$		$2\rho/D=0.03$		$2\rho/D=0.05$		$2\rho/D=0.1$		$2\rho/D=0.2$		$2\rho/D=0.5$		$2\rho/D=1.0$	
	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー
0.02	2.877	2.82	2.505	2.48	2.147	2.13	1.785	1.78	1.532	1.53	1.311	1.31	1.202	1.19
0.05	3.680	3.56	3.161	3.06	2.630	2.56	2.099	2.05	1.728	1.69	1.407	1.37	1.250	1.22
0.1	4.283	4.06	3.633	3.45	2.974	2.83	2.306	2.21	1.845	1.77	1.450	1.40	1.262	1.22
0.2	4.600	4.33	3.877	3.64	3.124	2.95	2.375	2.25	1.858	1.77	1.427	1.38	1.232	1.21
0.3	4.508	4.28	3.785	3.58	3.035	2.88	2.293	2.19	1.786	1.72	1.375	1.35	1.198	1.19
0.4	4.267	4.10	3.571	3.42	2.868	2.75	2.164	2.09	1.695	1.65	1.320	1.31	1.167	1.16
0.5	3.96	3.83	3.304	3.20	2.656	2.58	2.017	1.97	1.596	1.57	1.269	1.26	1.139	1.14
0.6	3.59	3.50	3.007	2.93	2.424	2.37	1.860	1.83	1.494	1.48	1.218	1.21	1.112	1.11
0.7	3.18	3.10	2.667	2.61	2.168	2.12	1.692	1.67	1.388	1.38	1.166	1.16	1.085	1.09
0.8	2.68	2.62	2.27	2.22	1.87	1.84	1.499	1.48	1.272	1.26	1.113	1.11	1.058	1.06
0.9	2.04	1.99	1.77	1.73	1.51	1.48	1.27	1.26	1.14	1.14	1.058	1.06	1.028	1.03

軸には切欠き底から内部方向の距離 x を切欠き半径 ρ で無次元化した値をとっている。これらの図から切欠き半径 ρ が一定なら切欠き深さ t_0 が広い範囲に変わっても、切欠き底近くの応力分布はほとんど変化しないことわかる。

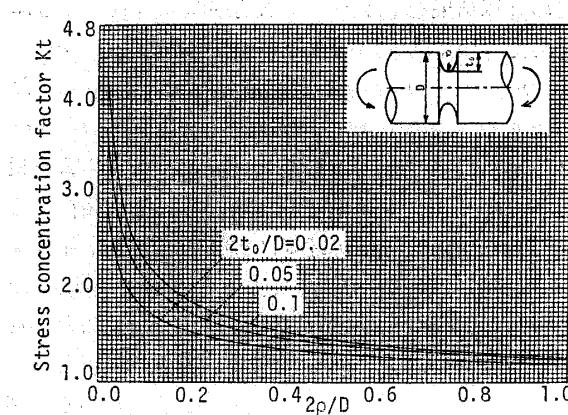


図 9 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t

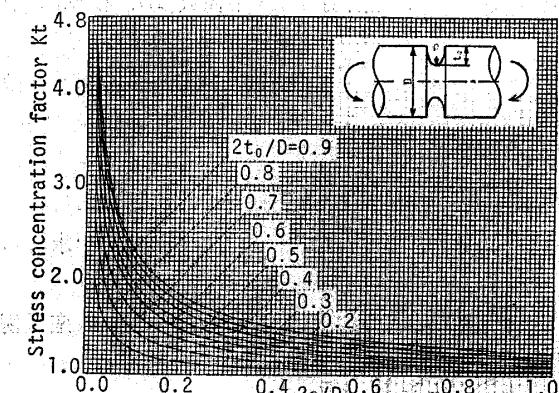


図 10 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t

西谷⁽¹⁴⁾は回転曲げ疲労強度における切欠き効果と寸法効果に関する研究において、(1) 分岐点における切欠き半径 ρ は深さ t_0 に関係なく一定になる、(2) 裂発生限界の切欠き底最大応力 $K_t \sigma_{w1}$ は応力こう配 χ のみの関数となるという実験事実から任意の寸法の切欠き材の疲労限度 (σ_{w1} および σ_{w2}) を決定する方法を述べている。そして、ノイバーの解（特に深い切欠きと浅い切欠きに対する解）から得られる応力分布をもとに寸法効果（または切欠き効果）に及ぼす切欠き半径 ρ の重要性を指摘しているが、本研究の解析によって ρ が応力分布を支配する決定的な因子であることが、さらに具体的に実際の形状について確認された訳である。

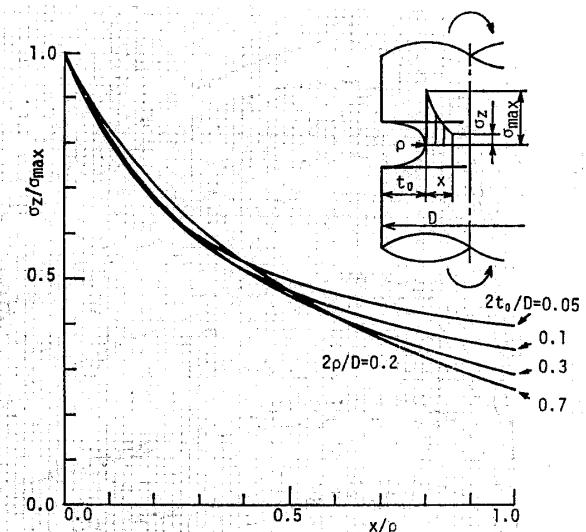


図 12 切欠き底近傍の応力分布

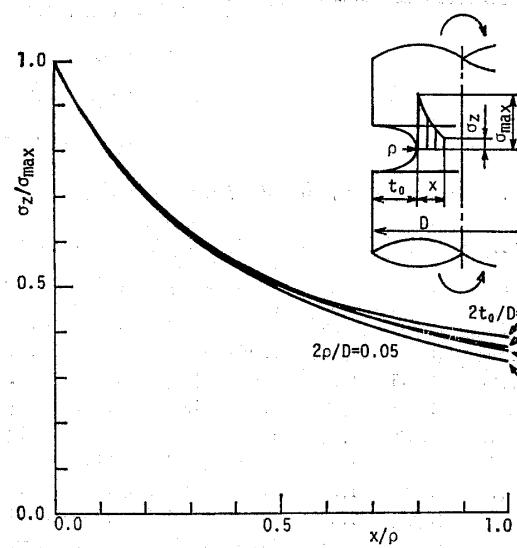


図 11 切欠き底近傍の応力分布（鋭い切欠きの場合）

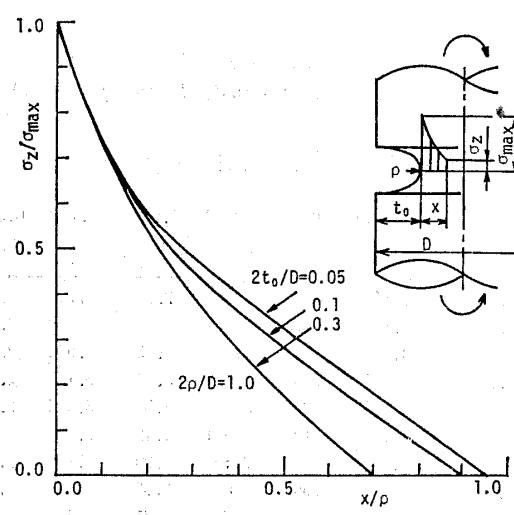


図 13 切欠き底近傍の応力分布（鈍い切欠きの場合）

表4 切欠き効果に関する実験データの検討（疲労限度の単位：kgf/mm²）

研究者	$2\rho/D$	$2t_0/D$	用いられた応力集中係数 K_t'	著者らの計算した応力集中係数 K_t	σ_{w0}	σ_{w0}/K_t'	σ_{w0}/K_t	σ_{w1}	材質
西岡ら ⁽¹⁵⁾	0.04	1/3	3.1	3.282	43	13.9	13.1	13	9% Ni 鋼
	0.04	1/3	3.1	3.282	56	18.1	17.1	17	9% Ni 鋼
	0.04	1/3	3.1	3.282	45	14.5	13.7	14	9% Ni 鋼
	0.04	1/3	3.1	3.282	60	19.4	18.3	18	9% Ni 鋼
清水ら ⁽¹⁶⁾	1/15	1/3	2.20	2.651	50	22.7	18.9	20	S 15C 高周波焼入れ材

3.5 回転曲げ疲労試験における切欠き効果に関する実験データの検討 緒言にも述べたように切欠き効果に関する過去の研究の中には、切欠き材の疲労限度 σ_{w1} が平滑材の疲労限度 σ_{w0} を応力集中係数 K_t でわった値より小さい ($\sigma_{w1} < \sigma_{w0}/K_t$) データが少なからず見られる。切欠き底におけるき裂の発生には最大応力と応力こう配が重要な因子であり、このようない立場からすれば平滑材と比べてこう配の大きい切欠き材で $\sigma_{w1} < \sigma_{w0}/K_t$ となることは不自然である。本研究では正確な応力集中係数によってこれら実験データのいくつかを検討する。この検討では四捨五入の影響が出てくるおそれがあるので、過去の研究データの単位をそのまま採用し、MPa は使わない。

表4に過去に行われた切欠き効果に関する実験データで $\sigma_{w1} < \sigma_{w0}/K_t$ となった例のいくつかを示す。西岡ら⁽¹⁵⁾の実験は 9% Ni 鋼を用いて室温および低温で行われたものであり、ノイバーの応力集中係数 $K_t' = 3.1$ を用いている。ノイバーの応力集中係数 $K_t' = 3.1$ で切欠き材の実験値を評価すれば不自然な印象を与えるが、本研究の方法で計算した正確な値 $K_t = 3.282$ を用いればこれらの実験値は納得できるものである（この実験は応力のきざみ 1 kgf/mm² で行われたことも考慮）。清水ら⁽¹⁶⁾の実験は S 15C 高周波焼入れ材によるデータであるが、この場合も著者らの計算した $K_t = 2.651$ を用いれば $\sigma_{w1} > \sigma_{w0}/K_t$ となる。このほか過去の実験結果のいくつかについても検討を行ったが、ノイバーの三角則による値を線図から読みとる際に読みとり誤差を生じたと思われる場合も少なからず見られた。このようにノイバーの三角則に基づく応力集中係数を使う場合には厳密な議論ができるにくらいことに注意しなければならない。

4. 結 言

円周切欠きを有する丸棒の曲げ応力集中係数は、厳密解がないためノイバーの三角則による値が長い間用いられてきた。その値については大きい誤差はないものとして受け入れられているようであるが、精度について具体的に議論がなされることはあまりなかった。

本研究では、体積法を利用して、第1報で確立した方法に基づきこの問題を解いた。数値解法であるが、得られた値は事実上の厳密解と考えてさしつかえない。結論をまとめると次のようになる。

(1) 寸法比を系統的に変化させて半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数を計算した結果、ノイバーの三角則による値には $2t_0/D$ の広い範囲にわたって危険側の誤差（最大 6% 程度）が存在することが明らかになった。なお、本研究の計算結果の誤差は最大でも 1% 以下で多くの場合 0.1% 以下である（四捨五入が ±1 度變る程度）。

(2) 得られた計算結果から設計や研究用の応力集中係数線図を作成した。

(3) 切欠き底の応力分布に及ぼす切欠き形状の影響について考察した結果、他の寸法には無関係に切欠き半径 ρ によって無次元化応力分布の形が決まり、回転曲げ疲労における寸法効果（または切欠き効果）に ρ が最も重要な意味をもつこと⁽¹⁴⁾を確認した。

(4) 半円形円周切欠きを有する丸棒について得られた応力集中係数は、 $2\rho/D \rightarrow 0$ に従って半無限板縁の半円切欠きの厳密解 $K_t = 3.065$ に、また $2\rho/D \rightarrow 1$ に従って $K_t = 1$ にそれぞれ無理なく一致する。また菊川ら⁽⁴⁾の実験によって得られた値は著者らの値にきわめてよく一致している。

(5) 切欠き効果に関する過去の研究では $\sigma_{w1} < \sigma_{w0}/K_t$ となる不自然な結果がいくつか見られるが、ノイバーの三角則による値のかわりに著者らの正確な応力集中係数を用いれば $\sigma_{w1} \approx \sigma_{w0}/K_t$ となって納得できる場合がある。

文 献

- (1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1957), Springer-Verlag.
- (2) Peterson, R.E., *Stress Concentration Design Factors*, (1962), John-Wiley & Sons.
- (3) 西田, 応力集中, (昭 48), 森北出版.
- (4) 菊川・佐藤, 機論, 38-311 (昭 47), 1663.
- (5) 佐藤・ほか 2 名, 機論, 42-364 (昭 51), 3701.
- (6) 宮本, 精密機械, 35-10 (昭 44), 609.
- (7) 村上・ほか 2 名, 機論, 47-423, A (昭 56), 1194.
- (8) 西谷・村上, 機誌, 75-642 (昭 47), 1081.

- (9) 村上・ほか 2 名, 本論文集 301 ページ.
 (10) 西谷, 機誌, 70-580 (昭 42), 627.
 (11) Ling, C. B., *J. Appl. Mech.*, 19-2 (1952), 141.
 (12) 石田, 機論, 19-87 (昭 28), 94.
 (13) 石田, 機論, 19-83 (昭 28), 5.

- (14) 西谷, 機論, 30-259 (昭 43), 37.
 (15) 西岡・ほか 2 名, 第 13 回疲労シンポジウム前刷集, (昭 54), 84, 日本材料学会.
 (16) 清水・ほか 2 名, 機論, 34-258 (昭 43), 230.

討 論

〔質問〕 岸田路也 (北海道大学工学部)
 浅野政之 (東京芝浦電気会社)

この解法、つまり、円筒面と回転だ円空かの組合せによる解法では、幾何形状の特異点である肩 B, B' が生ずる。この付近の応力状態は、強度上注目すべきものではないが、解析精度上興味がある。工夫をされてこの難点を克服されているが、境界条件の満足度、および応力状態についてお示し願いたい。

〔回答〕 本解法は連続的であるべき体積力の密度を階段状の分布でおきかえている。したがって境界条件の満足度は区間と区間の段の大きさと関係がある。一例として切欠き部分を 8 分割したときの各区間の ρ_z の値を示せば付表 1 のとおりである ($2\rho/D=0.1$, $2t_0/D=0.1$ の場合)。

$j=7$ と 8 の間の段でもそれ程大きくないことは B, B' 点の境界条件の満足度がかなりよいことを示している。なお、各区間で ρ_z に段があることはわずかな

付表 1 体積力の密度 ρ_z の例 ($2\rho/D=0.1$, $2t_0/D=0.1$, $n_1=8$ の場合)

j	ρ_z	j	ρ_z
1	3.941 699	5	3.850 950
2	3.931 377	6	3.820 152
3	3.911 404	7	3.812 293
4	3.883 567	8	3.939 131

がら切欠き上に応力が残っていることを意味しているが、それらの合モーメントは最小断面で零となるようにしてある。

このように有限の分割では、ある程度誤差はあるが、それらの誤差は $1/n_1$ にほぼ比例するので、外そう⁽¹⁰⁾によれば十分な精度を確保することができる。

〔質問〕 加藤 章 (中部工業大学)

ノイバーの三角則に基づく応力集中係数では厳密な議論ができにくいという点、質問者は同感に思う。

最小断面において曲げモーメント M を計算しておられるが [式 (10)], 無限遠 (あるいは図 5 の C 点) において曲げモーメントが M に等しいこと、またせん断力の合力が零になるという条件も必要ではないか。境界条件 2・1 節をほぼ満足する場合でも断面にわたって積分して合力を求めたらどうなるか。

〔回答〕 無限遠で曲げモーメントを厳密に M に等しくする必要はない。切欠き底の応力に実質的に変化を与えない程度 (5 けためが 1 変わる程度) の誤差は許される。せん断力の合力が零という条件に関しては全く同様である。ご質問の最後の部分の断面の「合力」がもし横断面における軸方向または軸と直角方向の合力の意味であれば、前者は厳密に零となり後者はほぼ零となる。